Trasformasi

Esther Wibowo - esther.visual@gmail.com
Erick Kurniawan – erick.kurniawan@gmail.com

Topik Hari Ini

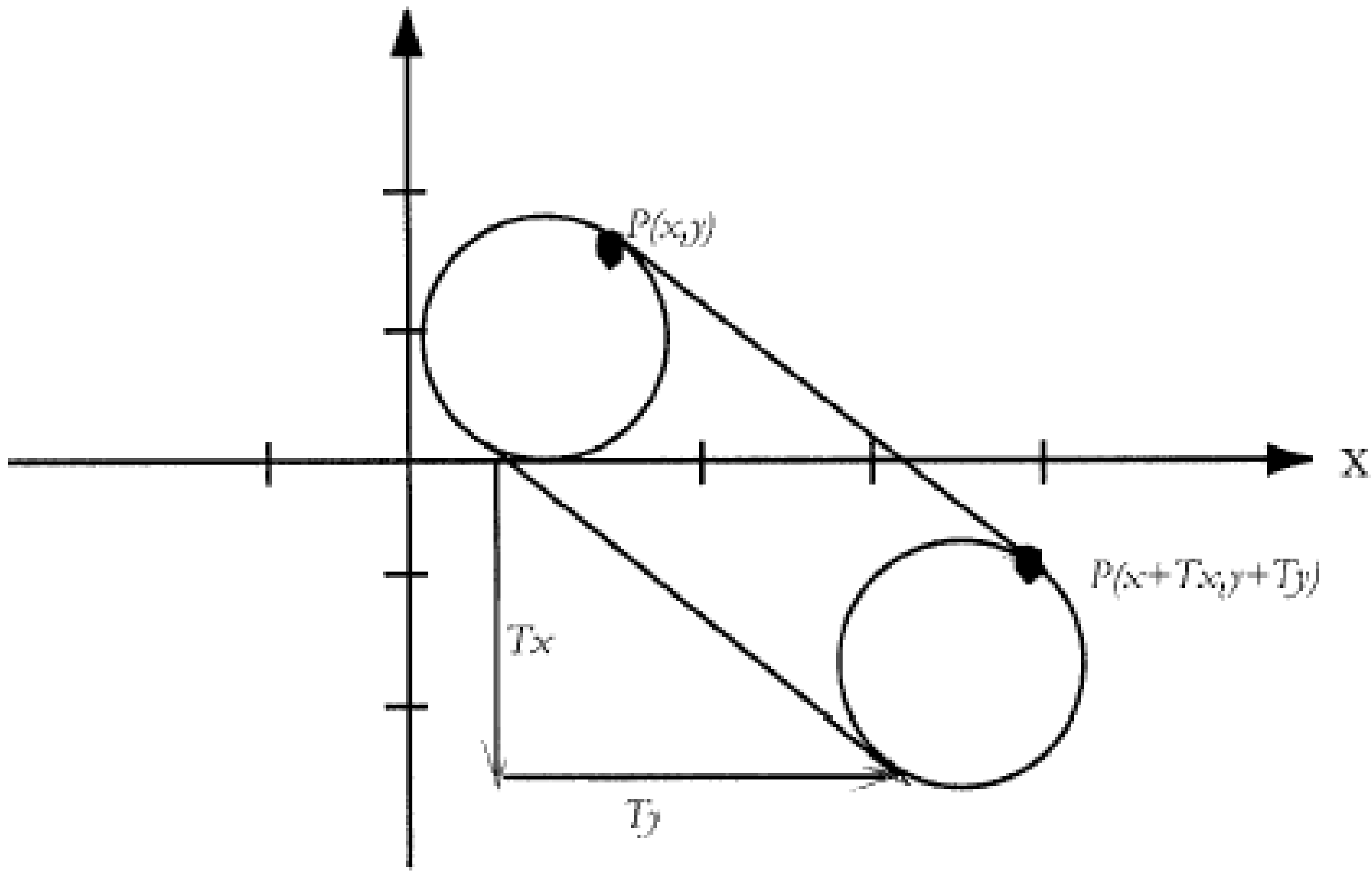
- Dasar Transformasi
  - Translation - Pemindahan, Penggeseran
  - Scaling - Perubahan Ukuran
  - Shear - Distorsi?
  - Rotation - Pemutaran
- Representasi Matriks
- Transformasi Gabungan

Mengapa perlu transformasi?

- Memposisikan objek - menggeser atau me
- Pebisnis merubah ukuran grafik
- Pembuat peta merubah ukuran (skala) bagan
- Arsitek merubah sudut pandang
- Animasi

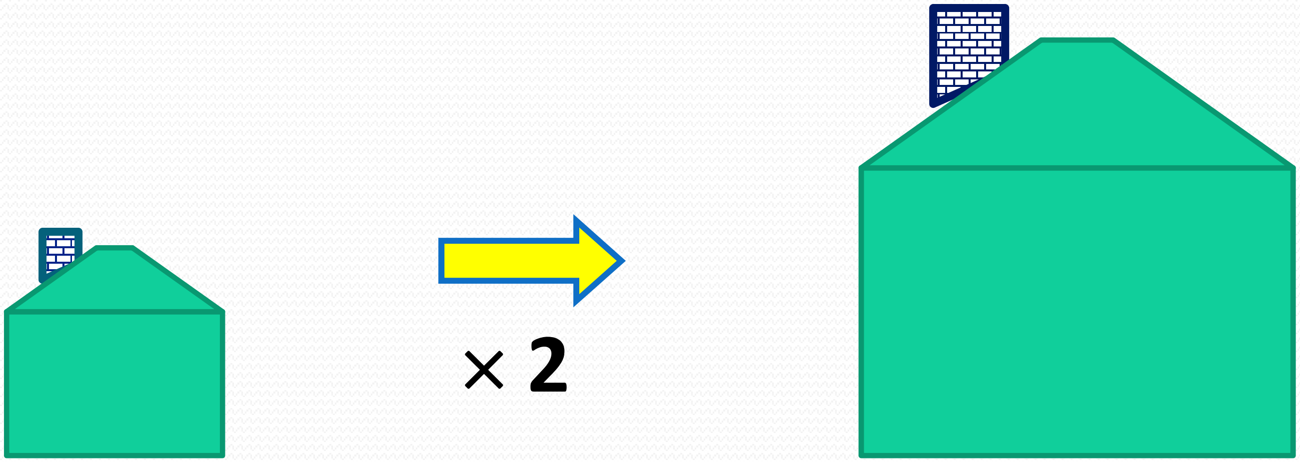
Translation Pemindahan

- Bila kita ingin memindahkan objek
- Misal:
  - Dari kiri ke kanan (searah dengan sumbu X)
  - Dari bawah ke atas (searah dengan sumbu Y)
- Rumus:
  - $x' = x + Tx$
  - $y' = y + Ty$


P(x,y)
X
P(x+Tx,y+Ty)
Tx
Ty

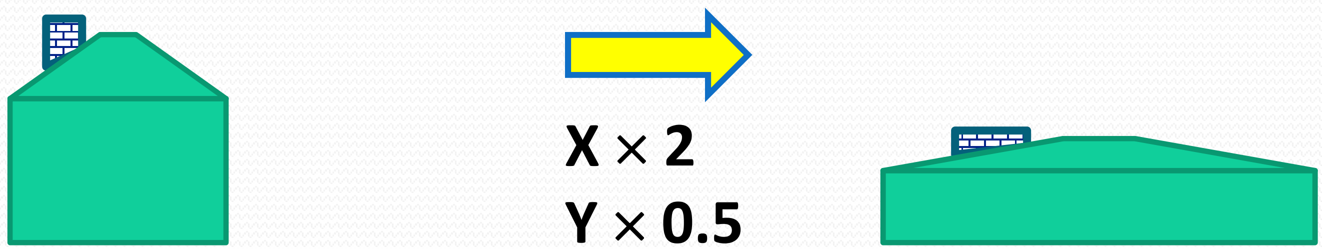
Scaling Pengubahan Ukuran

- Mengalikan tiap komponen dengan suatu nilai skalar.
- *Uniform scaling* (pengubahan ukuran yang seragam) : nilai skalar pengali tiap komponen adalah sama.

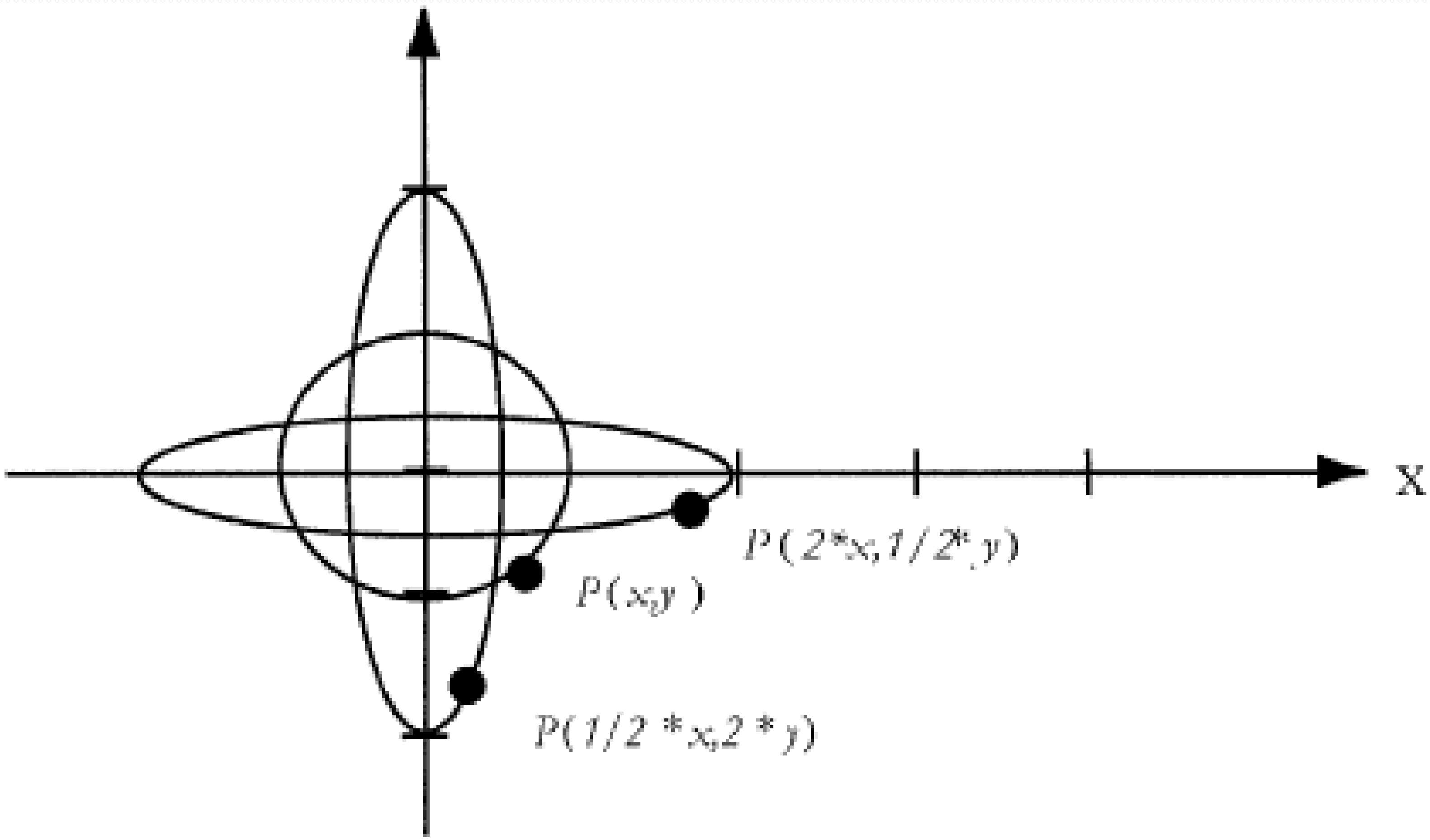


Non-Uniform Scaling

- Skalar pengali berbeda untuk tiap komponen.

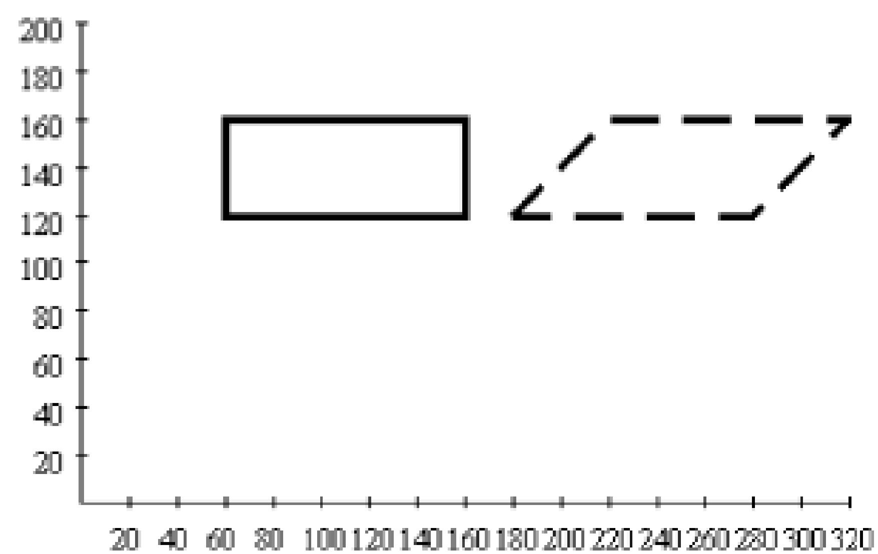


- Rumus:
  - x’ = x * Sx
  - y’ = y * Sy

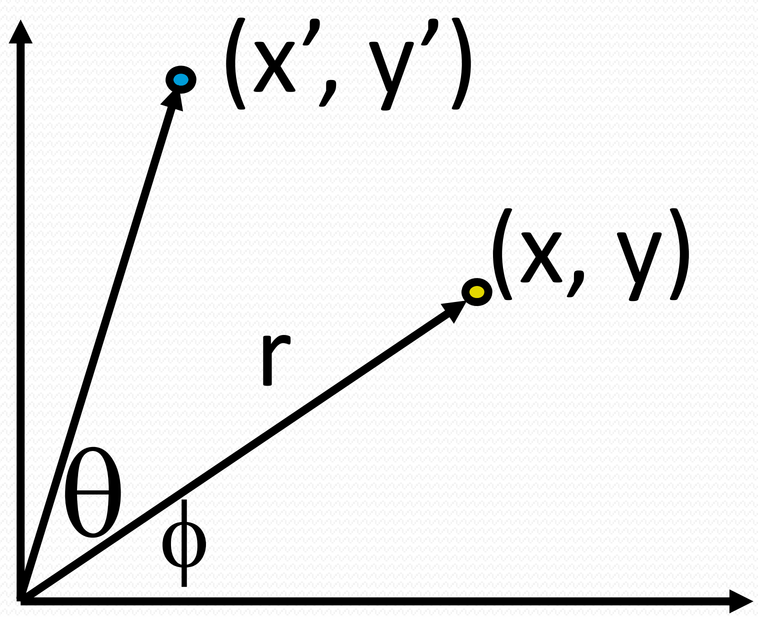

X
P(2*x,1/2*y)
P(x,y)
P(1/2*x,2*y)

Shear

- Pemindahan posisi yang hanya melibatkan sebagian sisi dari bentuk bangun (ada titik sumbu yang tidak berubah).
- Menyebabkan distorsi bentuk bangun.
- Rumus:
  - x’ = x + Hx*y
  - y’ = y + Hy*x



Rotation Pemutaran



$x = r \cos(\phi)$
$y = r \sin(\phi)$
$x' = r \cos(\phi + \theta)$
$y' = r \sin(\phi + \theta)$

Distribusi trigonometri
$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$
$y' = r \sin(\phi) \sin(\theta) + r \cos(\phi) \cos(\theta)$

Substitusi
$x' = x\, \mathbf{cos}(\theta) - y\, \mathbf{sin}(\theta)$
$y' = x\, \mathbf{sin}(\theta) + y\, \mathbf{cos}(\theta)$

Rangkuman Rumus Transformasi

- Translasi:
  - $x' = x + T_x$
  - $y' = y + T_y$
- Skala / Perubahan ukuran:
  - $x' = x * S_x$
  - $y' = y * S_y$
- Shear:
  - $x' = x + H_x * y$
  - $y' = y + H_y * x$
- Rotasi / Pemutaran:
  - $x' = x * \cos \Theta - y * \sin \Theta$
  - $y' = x * \sin \Theta + y * \cos \Theta$

Poros selalu di (0,0) !

Matriks Transformasi

- Merepresentasikan dan menghitung transformasi dalam bentuk matriks
- Kegunaan : memudahkan perhitungkan beberapa transformasi yang berurutan (*multiple transformations*)
- Transformasi yang berurutan dapat dihitung sekaligus dengan mengalikan matriks-matriks transformasi.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Representasi Matriks

- Representasi transformasi ke dalam matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Penghitungan transformasi dalam matriks

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

Transformasi dalam Matriks (1)

- Matriks indetitas

  Bila dikalikan (x,y) tidak akan mengubah nilai (x,y).

$$x' = x \qquad y' = y \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Pengubahan ukuran

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{s}_x * \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{s}_y * \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

Transformasi dalam Matriks (2)

- Shear

$$x' = x + sh_x * y$$
$$y' = sh_y * x + y$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ sh_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Rotasi

$$x' = \cos\theta * x - \sin\theta * y$$
$$y' = \sin\theta * x + \cos\theta * y$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformasi Tambahan (1)

- Refleksi (Mirroring) terhadap sumbu Y

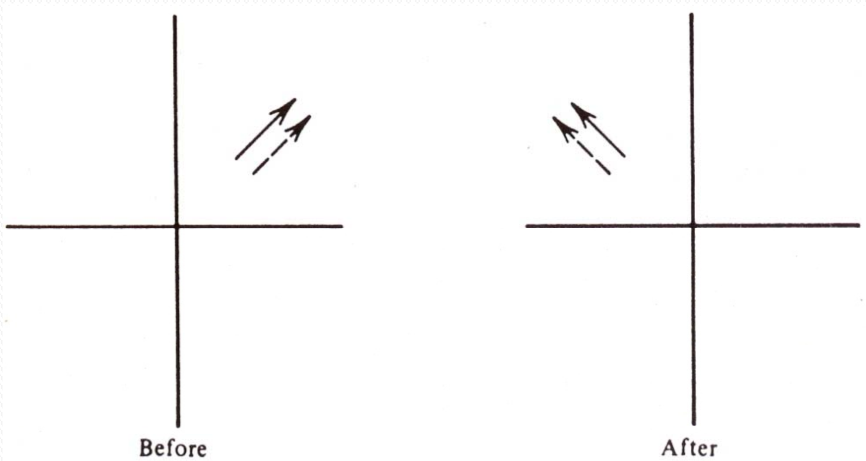
$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Refleksi terhadap sumbu X

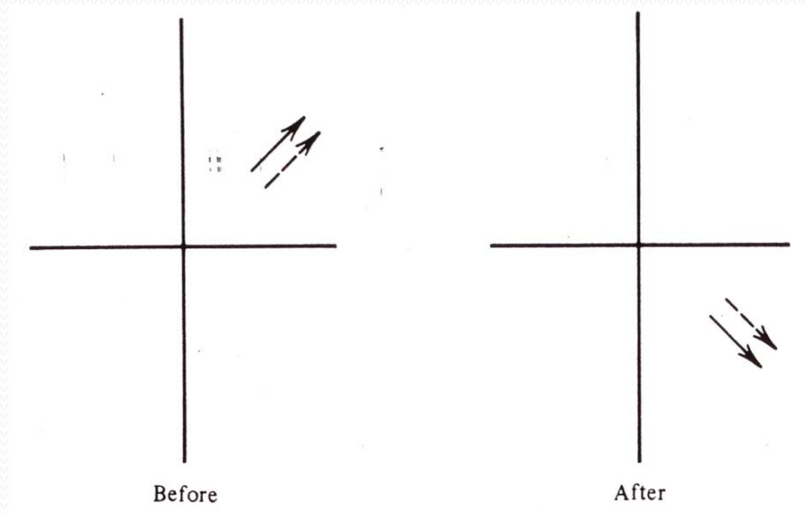
$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformasi Tambahan (2)

- Refleksi terhadap sumbu Y

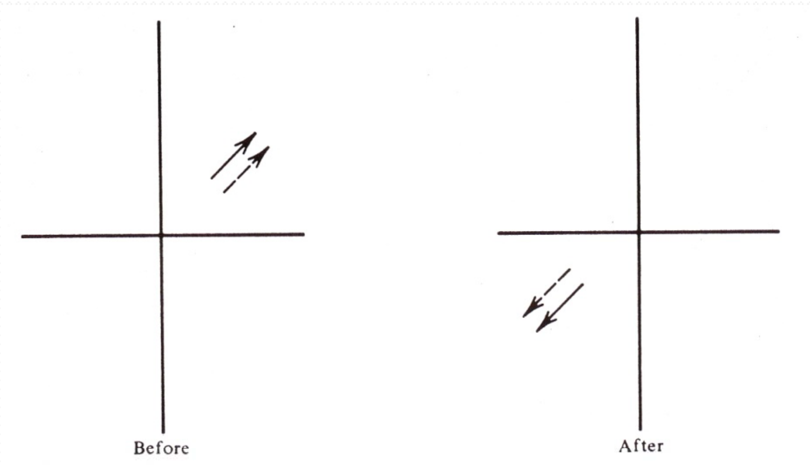


- Refleksi terhadap sumbu X

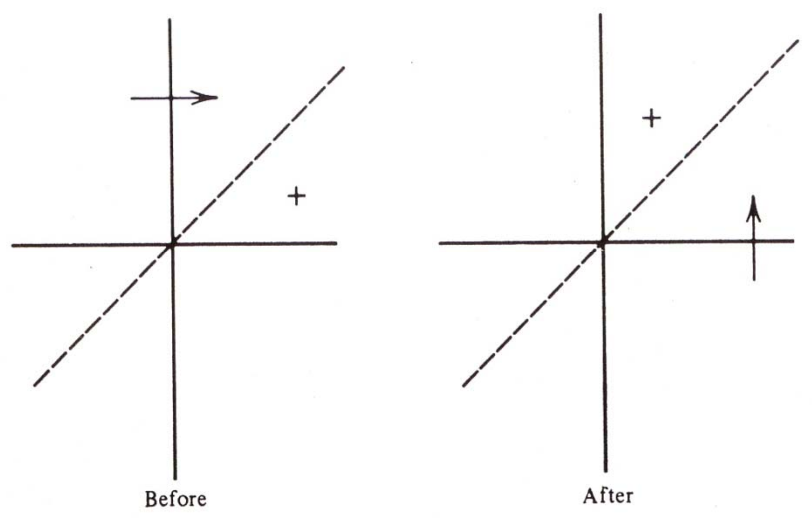


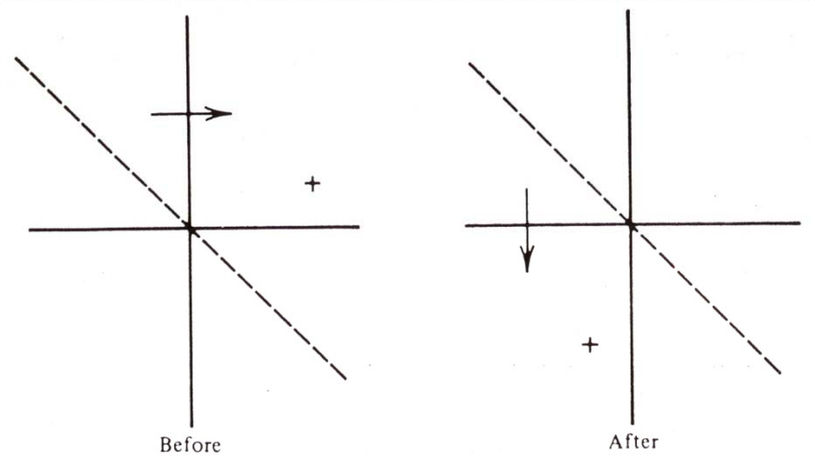
Transformasi Tambahan (3)

- Refleksi terhadap titik asal



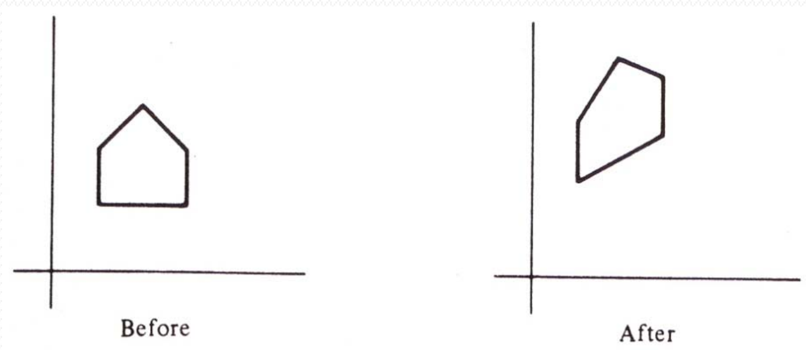
- Refleksi terhadap garis y=x
- Refleksi terhadap garis y=-x

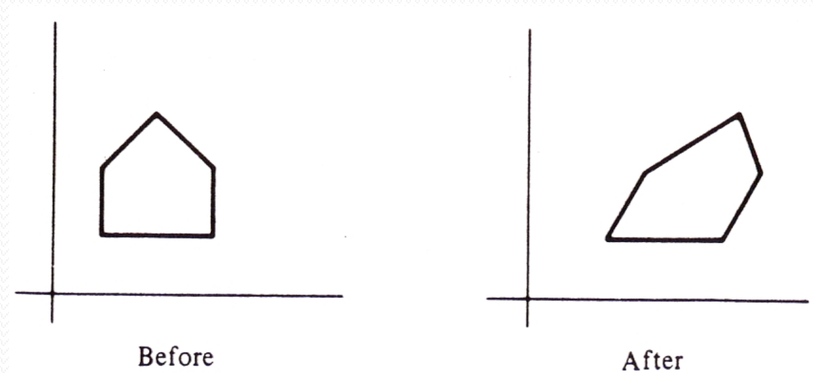




Shear

- Shear Y
- Shear X





Masalah!

- Bagaimana dengan translation?

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix}$$

- Bukan merupakan **transformasi linear**.
- Ciri transformasi linear :
  - Garis paralel tetap paralel
  - Rasio tidak berubah
  - Titik asal tidak berubah setelah dipetakan

Koordinat Homogen (1)

- Mengatasi masalah ketidak-konsistenan representasi transformasi dalam matriks.
- Menambahkan koordinat ke-3 dalam matriks.

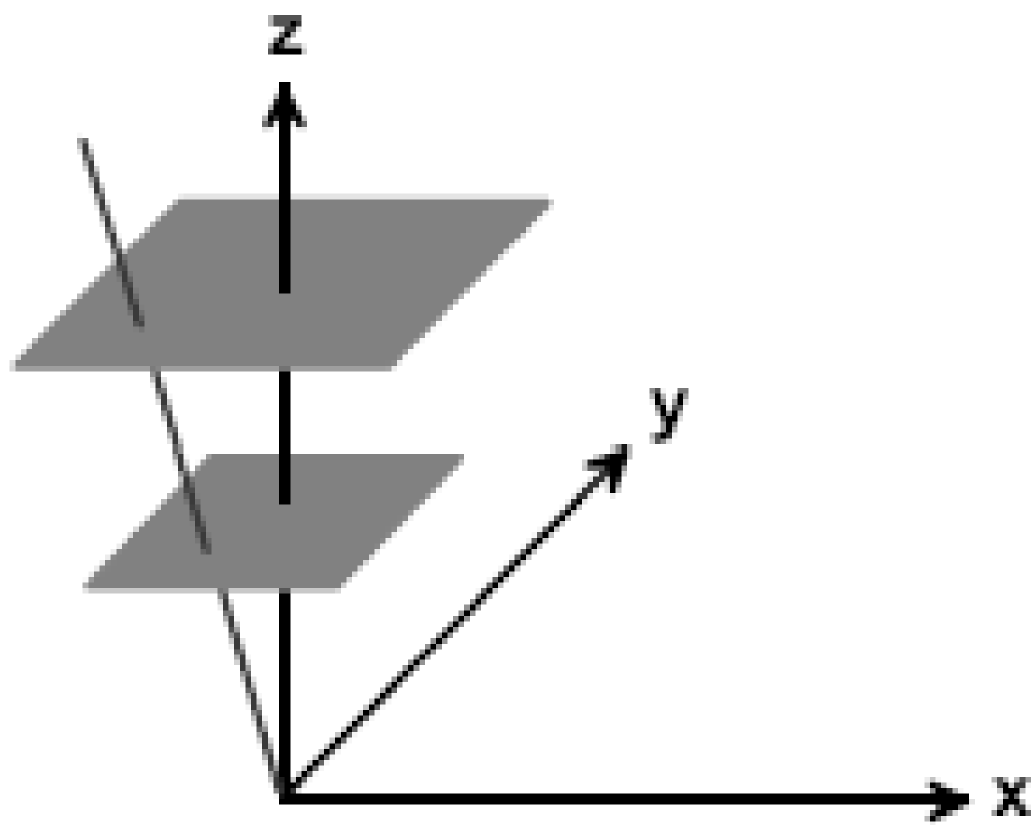
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{koordinat homogen}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Koordinat Homogen (2)

- (x,y,w) merepresentasikan suatu titik
- Untuk mengembalikan ke matriks dimensi 2, masing-masing komponen dibagi w → (x/w, y/w, 1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (x,y,0) merupakan suatu titik di tak terhingga.
- (0,0,0) tidak ada.


z
y
x

Matriks untuk Translation

- Kembali ke masalah representasi matriks untuk translasi, bagaimana merepresentasikan :

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix}$$

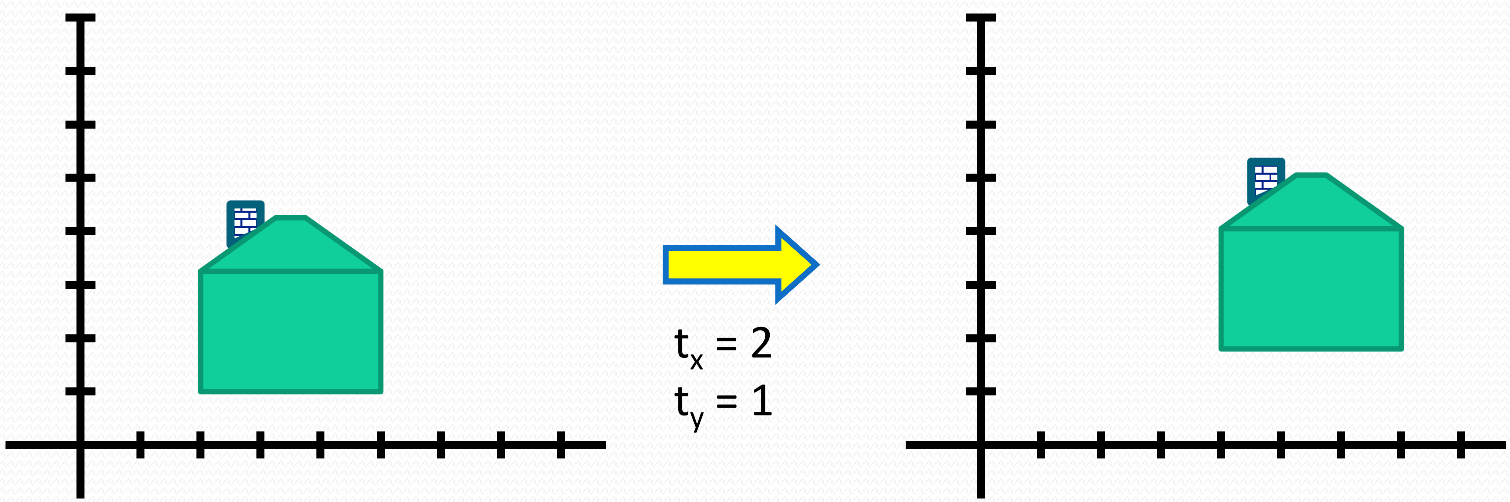
- Menggunakan kolom paling kanan :

Matriks translasi $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh Translation dengan Matriks

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{t}_x \\ 0 & 1 & \boldsymbol{t}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x \\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transformasi Matriks 3 Dimensi

- Translation

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{t}_x \\ 0 & 1 & \boldsymbol{t}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Scaling

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Shear

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{sh}_x & 0 \\ \boldsymbol{sh}_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kombinasi Transformasi

- Setelah menggunakan koordinat homogen, matriks transformasi sudah konsisten.
- Kita bisa menggabungkan perhitungan transformasi linear dengan translasi.
- Titik asal bisa berubah.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Komposisi Matriks

- Transformasi yang berurutan dapat dihitung dengan pengalian matriks.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p'}$ = $T(t_x,t_y)$ $R(\Theta)$ $S(s_x,s_y)$ $\mathbf{p}$

Urutan Perkalian Matriks

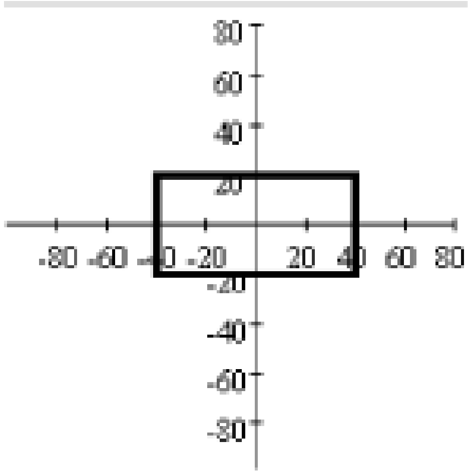
- Perkalian matriks tidak komunikatif (urutan tidak bisa diubah), kecuali untuk translasi sejenis.

  $$\mathbf{p}' = (T * (R * (S*\mathbf{p})\ )\ )$$

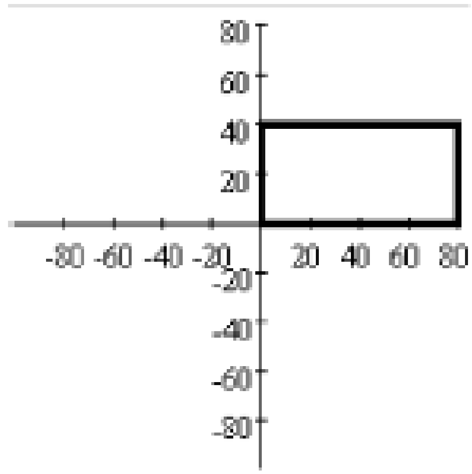
  $$\mathbf{p}' = (T*R*S) * \mathbf{p}$$

  $$\mathbf{p}' = T * R * S * \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p}' = T \circ R \circ S \circ \mathbf{p}$$

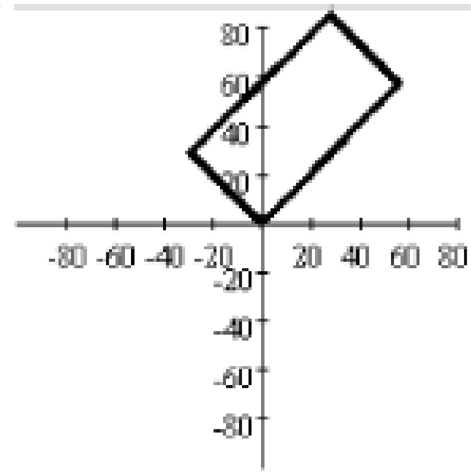
- Dalam perhitungan matriks, urutan translasi dibaca dari kanan ke kiri. Jadi dari rumus di atas urutan translasinya : shear → rotation → translation.



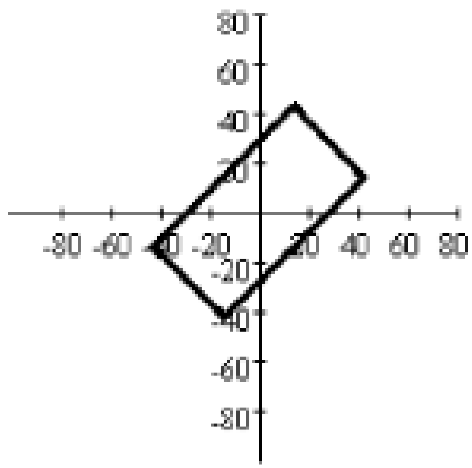
Original



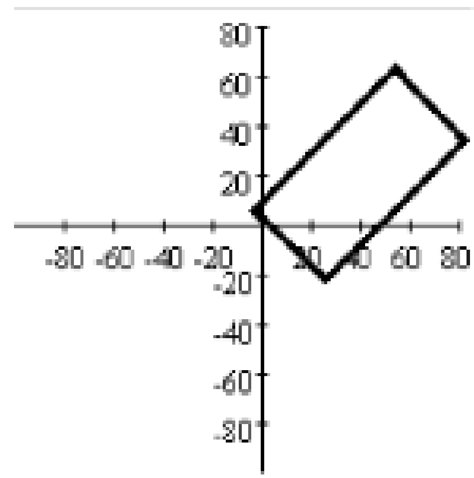
Translation



1. Translation, 2. Rotation



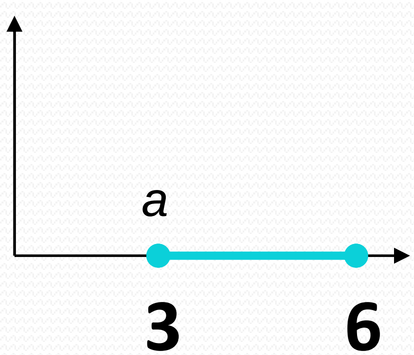
Rotation

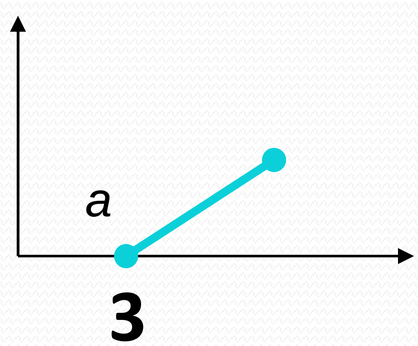


1. Rotation, 2. Translation

Contoh Komposisi Matriks

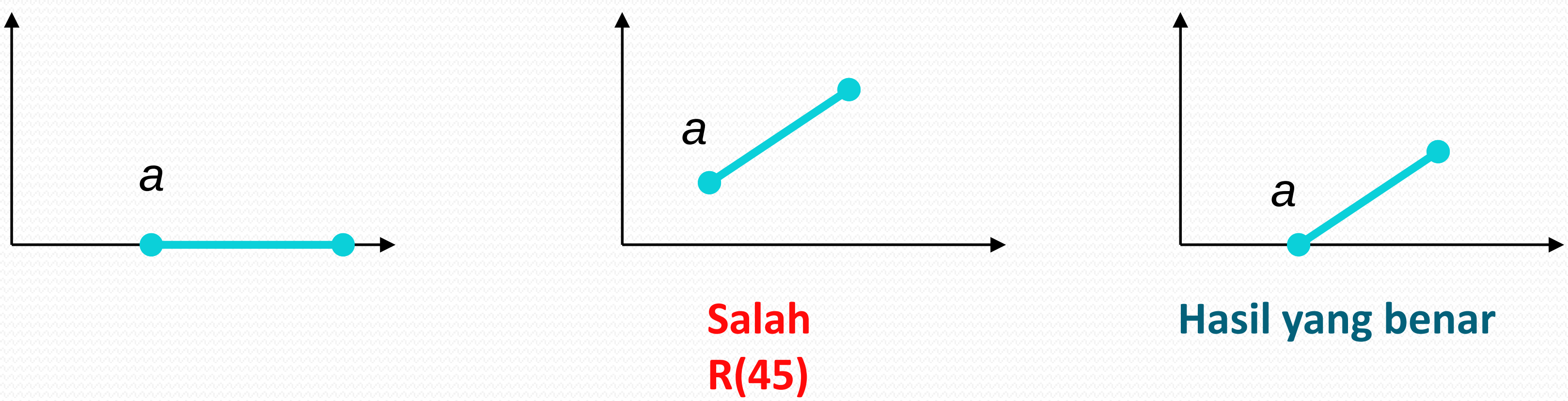
- Ingin melakukan rotasi dan translasi
- Putar segmen garis di bawah ini dengan sumbu ujung **a** di koordinat (3,0).
- Perhatikan bahwa segmen garis tidak memiliki titik awal di (0,0) - sumbu *rotation* bukan di (0,0) !





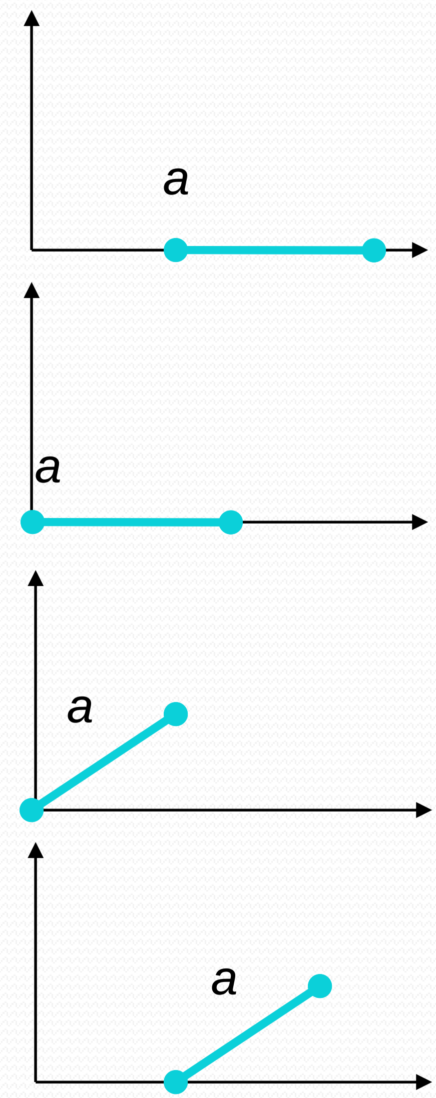
Cara Yang Salah

- Mengaplikasikan rotasi kepada kedua titik ujung segmen garis menghasilkan posisi yang salah.
- Bisa saja memutar kedua titik sebesar 45^{o} kemudian mengembalikan titik **a** ke posisi semula tapi kita tidak tahu berapa nilai translasi yang diperlukan.



Urutan Perhitungan

- Hilangkan dulu efek rotasi pada titik **a**.
- Translasikan segmen garis sehingga titik **a** di (0,0) → T(-3,0)
- Rotasikan segmen garis → R(45°)
- Kembalikan segmen garis ke titik awal semula → T(3,0)



Mana representasi yang benar?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Komposisi Matriks

- Inilah representasi yang benar dari komposisi matriks beberapa transformasi tadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk menghitung secara cepat beberapa titik pada suatu bentuk bangun dengan urutan transformasi yang sama, hitung dulu matriks transformasi-nya, baru dikalikan dengan masing-masing titik pada bentuk bangun.

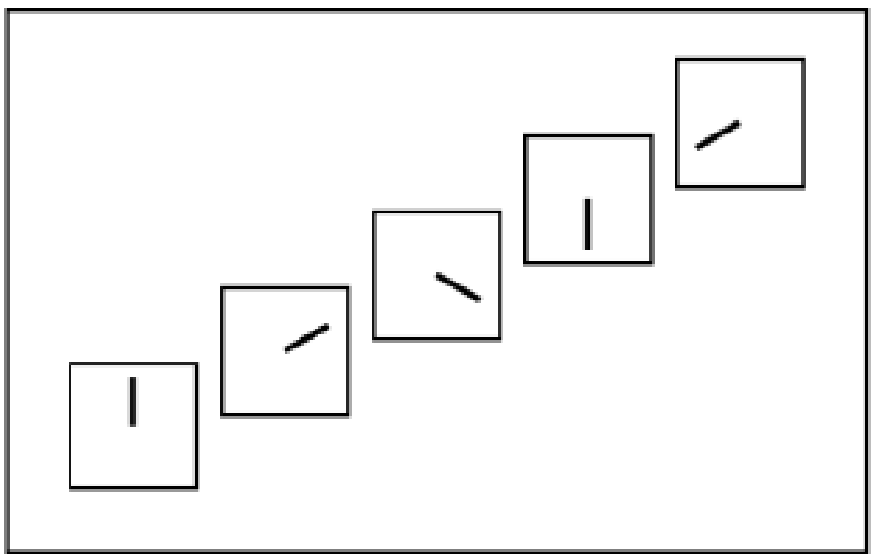
Animasi

- Transformasi geometrik sesuai untuk dipakai dalam animasi, misal animasi jarum jam yang berputar 30^o tiap jam atau 6^o tiap menit.
- Gerakan kontinyu harus dipecah dalam gerakan-gerakan kecil yang dapat dideskripsikan dengan transformasi.
- Perubahan gerakan harus :
  - Cukup kecil
  - Cukup cepat

  hingga tidak terdeteksi oleh penonton.

Contoh Animasi

- Sebuah jam dengan 1 jarum jam :
  - Bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dengan jarak tiap gerakan 2 unit ke kanan dan 1 unit ke atas → T(2,1)
  - Jarum jam bergerak 45° per gerakan → R(45°)



Metode Solusi 1

- Melacak pergerakan dan mendeteksi koordinat sumbu jarum jam saat ini.
- Menghitung rotasi jarum berdasar koordinat sumbu jarum jam saat ini.
- Menghitung translasi jam dan jarum jam baru dari koordinat saat ini.
- Kembali melacak koordinat sumbu jam yang baru.
- Menghitung rotasi jarum jam yang baru berdasar koordinat sumbu jam baru.
- Menghitung translasi jam dan jarum jam baru dari koordinat saat ini.
- Dst….

Metode Solusi 2

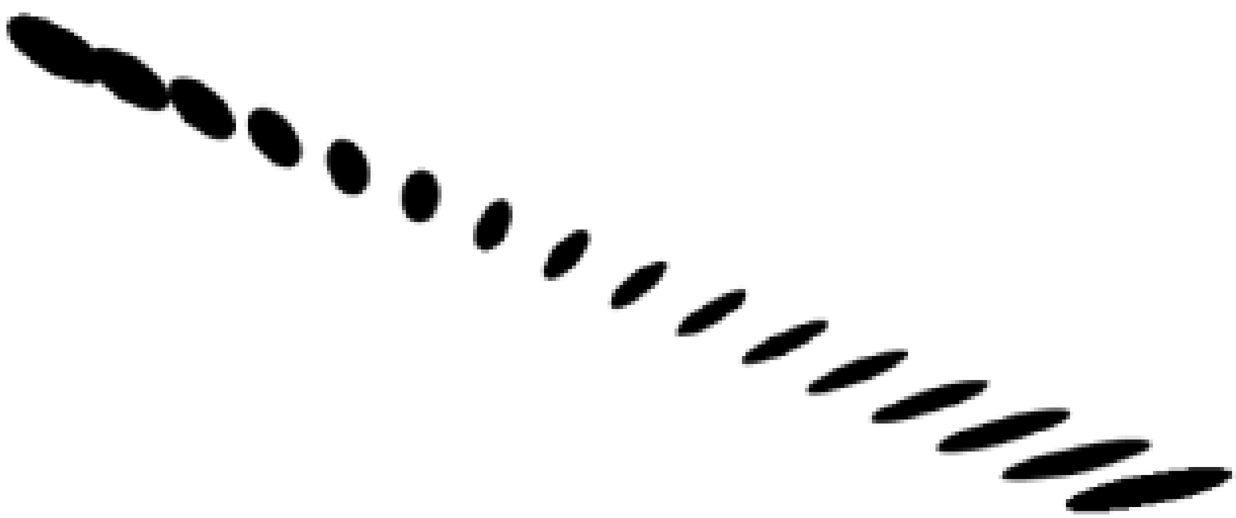
- Koordinat jam ditahan pada koordinat (0,0)
- Menghitung kumpulan transformasi sebelum animasi mulai dijalankan.

$$
\begin{aligned}
T^{(\mathrm{new})}_{\mathrm{clock,accTrans}} &= T_{\mathrm{clock,step}} \circ T^{(\mathrm{old})}_{\mathrm{clock,accTrans}} \\
T^{(\mathrm{new})}_{\mathrm{hand,accRotation}} &= T_{\mathrm{hand,step}} \circ T^{(\mathrm{old})}_{\mathrm{hand,accRotation}} \\
T_{\mathrm{hand,acc}} &= T_{\mathrm{clock,accTrans}} \circ T_{\mathrm{hand,accRotation}}.
\end{aligned}
$$

- Menghitung posisi dan rotasi jam beserta jarumnya dengan kumpulan translasi tersebut dengan variabel dari posisi (0,0).

Interpolasi

- Salah satu model animasi
- Initial state → final desired state



initial → **final**

Soal Animasi Jam

- Dalam contoh jam tadi, ada translasi T(2,1). Semisal diinginkan ada 100 gerakan.
- Nyatakan posisi awal $p_0 = (0,0)^T$ dan posisi akhir $p_1 = (200,100)^T$
- Titik p_α adalah titik yang menghubungkan p_0 dan p_1

$$\mathbf{p}_\alpha = (1-\alpha)\cdot\mathbf{p}_0 + \alpha\cdot\mathbf{p}_1 \qquad \alpha \in [0,1]$$

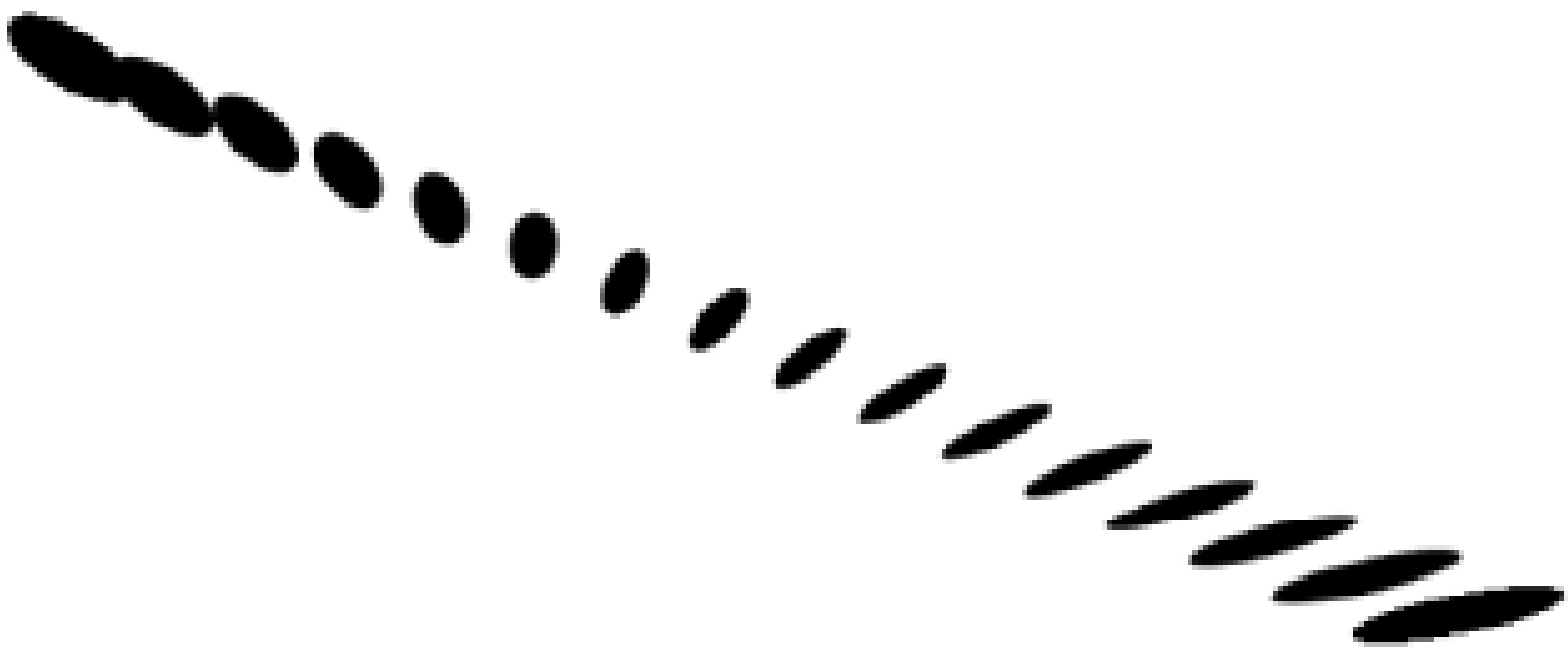
- $\alpha = 0 \rightarrow$ posisi awal
- $\alpha = 1 \rightarrow$ posisi akhir
- Teknik ini disebut **Convex Combination** (Kombinasi Cembung)

Interpolasi Matriks

- Interpolasi juga dapat diterapkan pada matriks homogen.

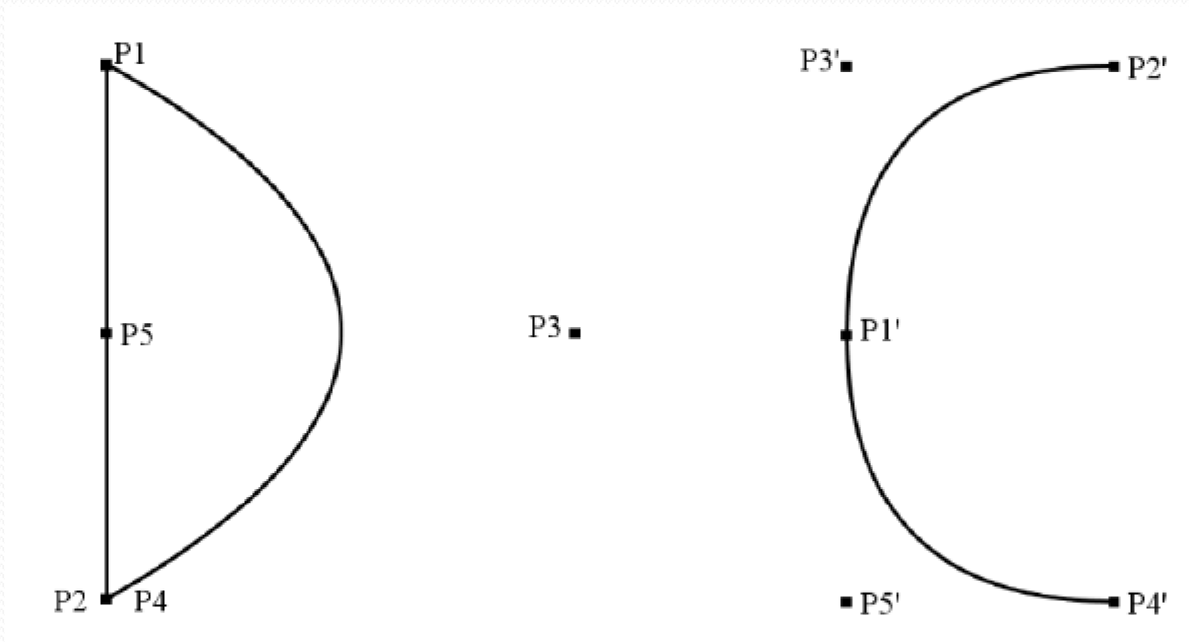
$$M_\alpha = (1-\alpha)\cdot M_0 + \alpha \cdot M_1, \qquad \alpha \in [0,1].$$

- Matriks-matriks ini memetakan objek dari posisi awal hingga posisi akhir.
- Kombinasi Cembung dapat pula digunakan untuk matriks transformasi yang memiliki *initial state* berbeda dengan *final state*. Misalnya *initial state* : rotation, *final state* : shearing.



Interpolasi Titik

- Dua objek S dan S’ memiliki salah satu titik p.
- *P1 = (x1, y1), . . . , Pn = (xn, yn) and P1 = (x1, y1), . . . , Pn = (xn, yn)*



Interpolasi D ke C

- S= Huruf D , S’ = Huruf C
- Masing-masing memiliki titik 1 dan 2 sebagai titik awal dan dan akhir.
- Titik 3 sebagai titik kontrol.
- Hasil akhir memiliki titik 2 dan 4 sebagai ujung dan titik 5 sebagai titik kontrol.

$$P_i^{(\alpha)} = (1-\alpha) \cdot P_i + \alpha \cdot P_i'.$$

Hasil Interpolasi D ke C

- Berikut adalah hasil interpolasi saat α = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1